

SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Mapa kursa

Modelovanje

Klasifikacija sistema

Diferencijalne jednačine

Funkcija prenosa

- Polovi, nule, pojačanje
- Strukturni blok dijagrami

Graf toka signala

Model u prostoru stanja

- Kanonične forme
- Linearizacija
- Rješavanje jednačina stanja

Analiza

Kontrolabilnost i

opservabilnost

Stabilnost sistema

- Raus
- Nikvist

Performanse SAU-a

- Stacionarno stanje
- Prelazni proces
- Kompleksni domen

Frekvencijske

karakteristike

- Bodeovi dijagrami

Dizajn

Specifikacije sistema

Kompenzatori

- Pojačavač
- Integralni kompenzator
- Diferencijalni kompenzator
- Diferencijalno - integralni kompenzator

PID regulator

Fizičke realizacije

Diskretizacija kontinualnih regulatora

Predavanje 10

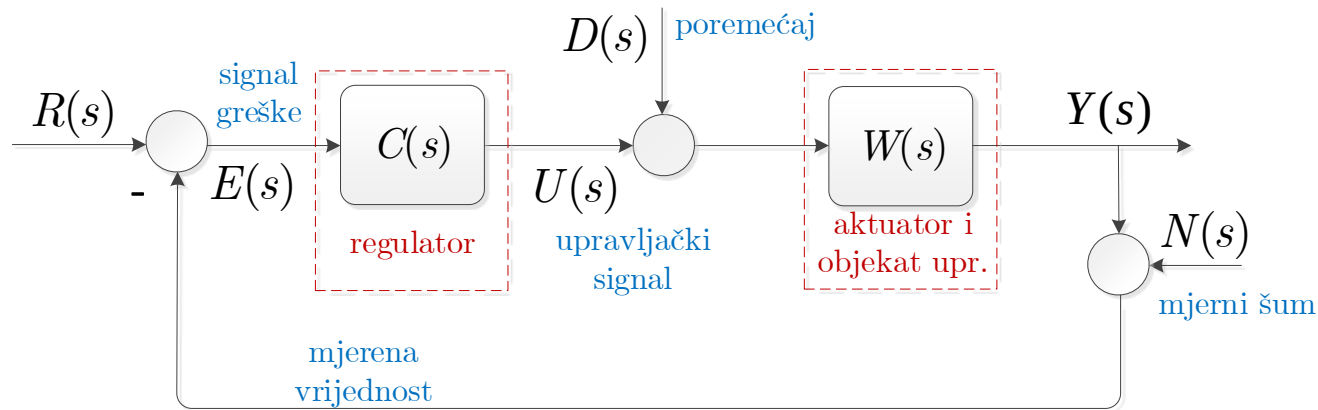
Dizajn regulatora u frekvencijskom domenu

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- ❖ Definišu osnovne komponente kontrolera (statičke i dinamičke performanse)
- ❖ Prepoznaju vezu između karakterističnih veličina sistema u otvorenoj sprezi, karakterističnih veličina spregnutog sistema i karakterističnih veličina u vremenskom domenu.
- ❖ Razumiju uticaj pojačavača i integralnog kompenzatora na frekvencijske karakteristike sistema
- ❖ Izvrše sintezu integralnog kompenzatora u frekvencijskom domenu

Dizajn SAU-a



Cilj upravljanja je minimizacija greške sistema u praćenju referentnog signala, $e_{ry}(t)=r(t)-y(t)$:

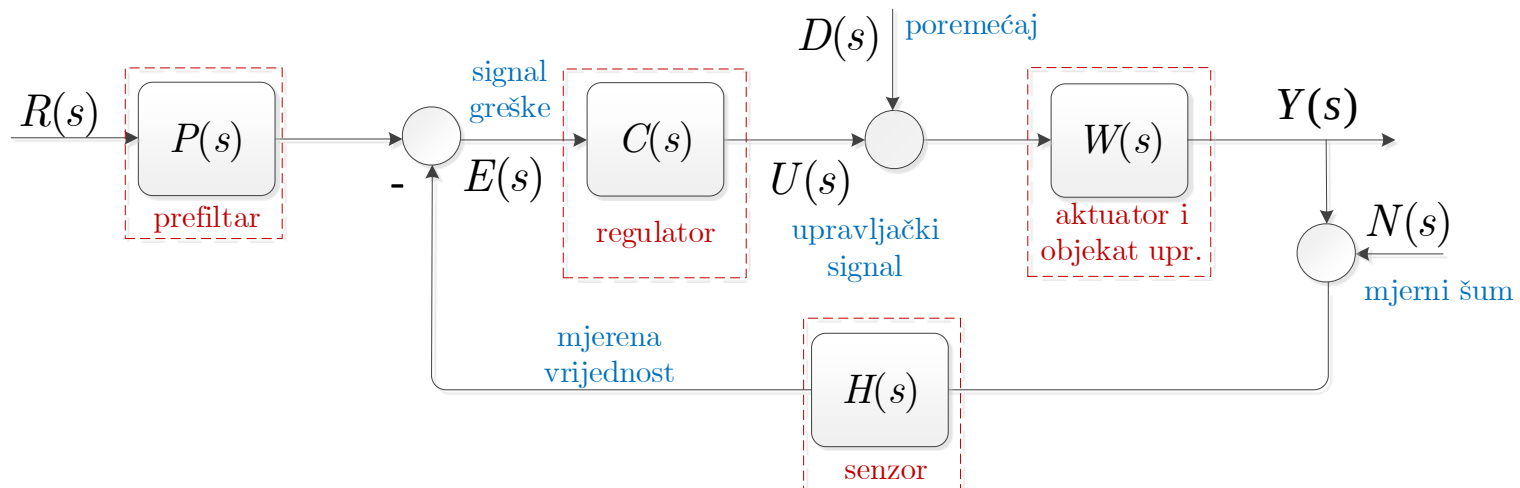
- uprkos poremećajima koji djeluju na sistem,
- uprkos nepoznavanju egzaktnog modela procesa $W(s)$,
- uprkos mjernim šumovima,
- uprkos dinamici procesa (spor, nestabilan, oscilatoran, itd.).

Dizajn SAU-a

Da bi postigli ovaj cilj treba dizajnirati regulator $C(s)$, takav da rezultujući SAU:

- bude stabilan u nominalnim uslovima (nominalni parametri sistema),
- bude stabilan u slučajevima kada se jave varijacije u parametrima sistema (odgovarajuće margine stabilnosti),
- ima odgovarajuće statičke performanse (konstante greške, odnosno grešku u stacionarnom stanju),
- ima odgovarajuće dinamičke performanse (preskok, vrijeme smirenja, vrijeme uspona, itd.),
- bude robustan na mjerne šumove i poremećaje (odgovarajući propusni opseg),
- bude fizički izvodljiv (kontroler mora biti kauzalan).

Dizajn SAU-a



U opštijem slučaju kada senzor ima neku dinamiku $H(s)$, koristi se takozvana šema sa dva stepena slobode (2DOF), kod koje se pored kontrolera $C(s)$ koristi i komponenta koja se zove prefilter $P(s)$. Zadatak prefiltara je, između ostalog, poništavanje dinamike senzora $H(s)$. U tom slučaju $P(s)$ treba odabrati tako da važi $P(s)=H(s)$. Pored toga, prefilter se može dizajnirati i tako da se poništi efekat nule objekta upravljanja, ukoliko ona previše utiče na odziv.

Napomena: pokazati da sistem u otvorenoj petlji i spregnuti sistem imaju iste nule.

Statičke performanse

Zahtijev sa praćenjem referentnog signala iz klase polinomijalnih signala se zadovoljava korišćenjem kontrolera:

$$C(s) = \frac{K}{s^h},$$

gdje h definiše red integratora, dok je K pojačanje kontrolera. Na primjer, ukoliko želimo da SAU prati rampa funkciju bez greške, tada h ima vrijednost 2 (pod uslovom da objekat upravljanja nema astatizam), dok se K nalazi na osnovu željene vrijednosti konstante ubrzanja ili greške u praćenju paraboličnog signala. Treba imati u vidu da povećavanje reda astatizma destabiliše sistem u otvorenoj sprezi, što znači će biti potrebne veće vrijednosti upravljačkog signala (uložena energija) da bi ustabilili sistem. Iako linearna teorija ne postavlja ograničenja u pogledu vrijednosti upravljačkih signala, treba uzeti u obzir da u praksi regulatori i aktuatori ne mogu da daju proizvoljne vrijednosti, već postoje radni opsezi u kojima je njihova karakteristika linearna, nakon čega ulaze u zasićenje.

Dinamičke performanse

Za poboljšavanje karakteristika tranzijenta koristi se sljedeći tip kontrolera:

$$C(s) = \frac{\prod_k \left(\frac{j\omega}{a_k} + 1 \right) \prod_z \left(\frac{(j\omega)^2}{\omega_{nz}^2} + \frac{j2\zeta_z \omega}{\omega_{nz}} + 1 \right)}{\prod_i \left(\frac{j\omega}{a_i} + 1 \right) \prod_l \left(\frac{(j\omega)^2}{\omega_{nl}^2} + \frac{j2\zeta_l \omega}{\omega_{nl}} + 1 \right)}.$$

Parametre kontrolera treba odabrati tako da SAU bude stabilan i da ima odgovarajuće karakteristike prelaznog procesa. Pojačanje ovog kontrolera je jedinično, što znači da ne utiče na grešku u stacionarnom stanju. Prvo se vrši projektovanje kontrolera kojim se podešava željena vrijednost greške i tip sistema, a zatim se biraju parametri ovog kontrolera. Najčešće se koriste kontroleri koji imaju jedan prosti pol i jednu prostu nulu u lijevoj poluravni s -ravni, odnosno redna veza više njih. Kontroleri sa kompleksnim polovima se koriste u slučajevima kada treba prigušiti određene frekvencije sistema (imaju rezonantne vrhove).

Dinamičke performanse

Za poboljšavanje relativne stabilnosti sistema (margina stabilnosti) i smanjenje preskoka u vremenskom domenu koristi se *lag* (eng. phase lag) ili integralni kompenzator koji ima funkciju prenosa:

$$G_i(s) = \frac{s / b + 1}{s / a + 1}, \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0}, \quad a < b.$$

pri čemu se pol nalazi bliže koordinatnom početku u odnosu na nulu.

Drugi tip regulatora koji se često koristi je *lead* (eng. phase lead) ili diferencijalni kompenzator:

$$G_d(s) = \frac{s / a + 1}{s / b + 1}, \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0}, \quad a < b.$$

Ovaj kontroler ima istu funkciju prenosa kao i integralni kompenzator. Razlika je u tome što se kod njega nula nalazi bliže koordinatnom početku. Diferencijalni kompenzator se najčešće koristi za povećavanje propusnog opsega sistema, smanjenje vremena uspona i smanjenje vremena smirenja.

Sinteza regulatora

Regulatori se mogu dizajnirati na više načina:

- **Analitičkim putem**

Analitički pristup je jednostavan ukoliko je funkcija prenosa u otvorenoj sprezi prvog ili drugog reda.

- **U kompleksnom domenu**

U kompleksnom domenu se kompenzatori mogu dizajnirati pomoću metode koja se zove geometrijsko mjesto korijena (GMK). Kod ove metode dominantni polovi sistema se podešavaju na željenu vrijednost. GMK metoda neće biti obrađena u okviru ovog kursa.

- **U frekvencijskom domenu**

Kod ove metode frekvencijska karakteristika funkcije povratnog prenosa se modifikuje tako da ima željeni oblik, uzimajući u obzir njen uticaj na frekvencijsku karakteristiku spregnutog sistema, odnosno na performanse u vremenskom domenu. Upravo, zbog ovakvog načina dizajna, regulatori se nazivaju i kompenzatorima, jer se njima kompenzuje funkcija prenosa u otvorenoj sprezi.

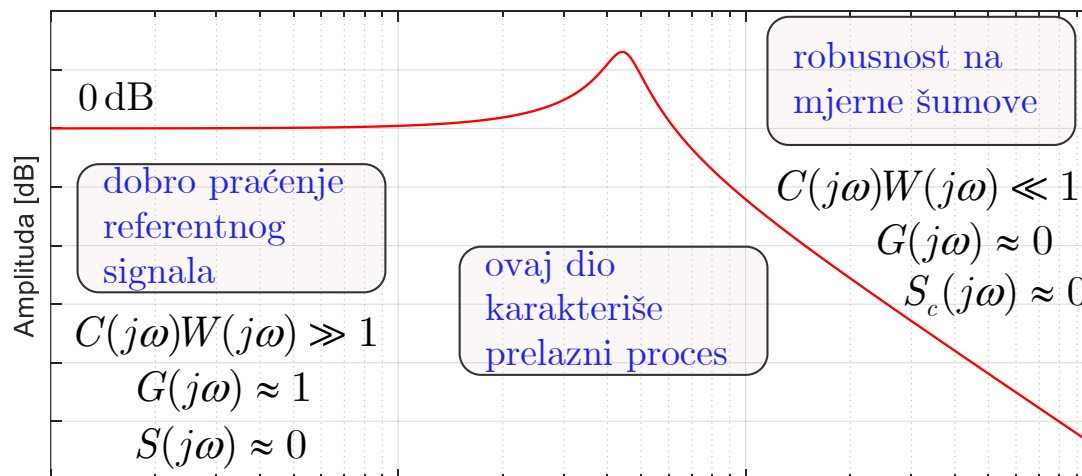
Performanse u frekvencijskom domenu

Izlazni signal SAU-a je jednak :

$$Y(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} R(j\omega) + \frac{W(j\omega)}{1 + L(j\omega)} D(j\omega) - \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} N(j\omega), \quad L(j\omega) = C(j\omega)W(j\omega).$$

Kako bi se obezbijedilo dobro praćenje referentnog signala i redukcija uticaja poremećaja, amplitudska karakteristika spregnutog sistema na niskim učestanostima treba da ima jedinično pojačanje, odnosno 0dB na decibelskoj skali (referentni signali i poremećaji imaju niskofrekvencijski sadržaj). To znači, da funkcija prenosa sistema u otvorenoj petlji treba da ima što veću vrijednost na nižim frekvencijama.

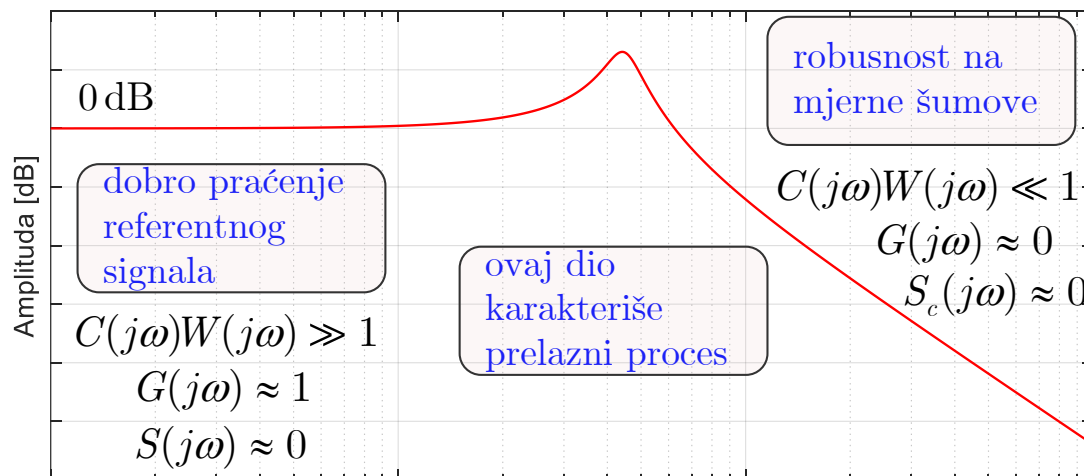
$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(s)}$$
$$S_c(j\omega) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$
$$S(j\omega) + S_c(j\omega) = 1$$



Performanse u frekvencijskom domenu

Na visokim učestanostima, amplituda treba da ima vrijednosti što bliže nuli, odnosno $-\infty$ dB, kako bi SAU bio manje osjetljiv na mjerne šumove. To znači da funkcija prenosa sistema u otvorenoj petlji treba da ima što manje vrijednosti na visokim frekvencijama. Odnosno, funkcija komplementarne osjetljivosti treba da bude jednaka nuli. Karakteristika spregnutog sistema na srednjim učestanostima karakteriše prelazni proces. Veći rezonantni vrhovi impliciraju veći preskok u vremenskom domenu. Sa druge strane, veći propusni opseg implicira kraće vrijeme uspona, kao i kraće vrijeme smirenja (za istu vrijednost rezonantnog vrha).

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(s)}$$
$$S_c(j\omega) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$
$$S(j\omega) + S_c(j\omega) = 1$$



Veza sa funkcijom povratnog prenosa

Sinteza kompenzatora u frekvencijskom domenu se zasniva na modifikovanju frekvencijske karakteristike u otvorenoj sprezi (eng. loop shaping), kako bi spregnuti sistem imao željene karakteristike. Naravno, najprije treba napraviti vezu između frekvencijske karakteristike u otvorenoj i zatvorenoj sprezi.

Bitne karakterisitke sistema u otvorenoj sprezi, koje utiču na karakteristike/ponašanje sistema sa zatvorenom spregom su:

- margine stabilnosti (pretek pojačanja i pretek faze),
- presječne učestanosti preteka faze i preteka pojačanja,
- statičke konstante greške (konstanta položaja, brzine, itd.).

Dizajn regulatora u frekvencijskom domenu se svodi na podešavanje ovih veličina, jer one direktno utiču na performanse spregnutog sistema u smislu prelaznog procesa i stacionarnog stanja.

Pretek faze i pretek pojačanja

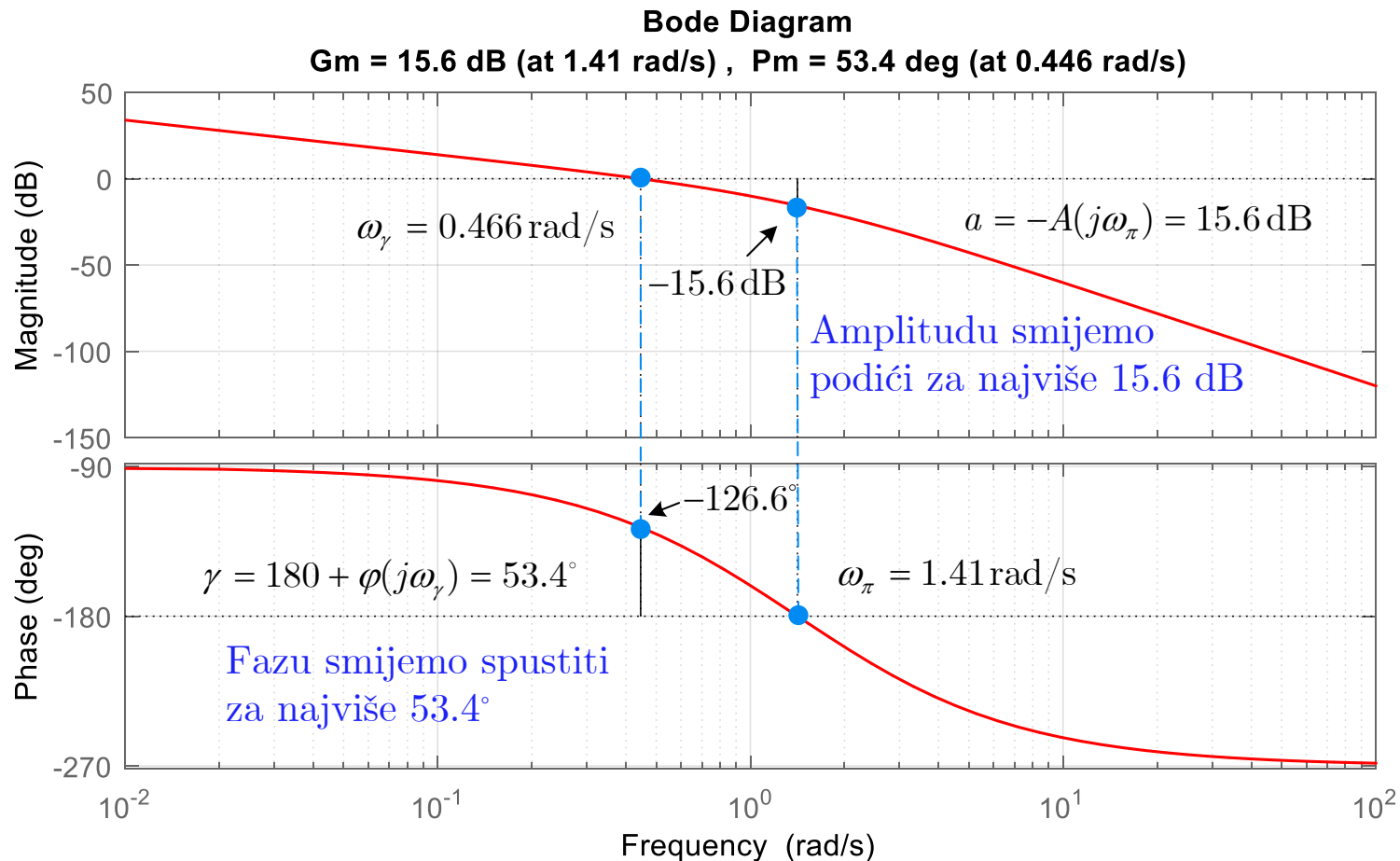
Pretek faze i pretek pojačanja smo definisali na Nikvistovoj krivoj kako mjere relativne stabilnosti, odnosno kao veličine koje govore koliko je sistem udaljen od kritične tačke $(-1, j0)$. Prilikom projektovanja SAU-a preteke faze i pojačanja treba ostaviti dovoljno velike, jer na taj način osiguravamo stabilnost sistema u slučajevima kada se naprave određene greške u modelovanju sistema ili ukoliko dodje do promjena nominalnih parametara sistema. Preteci pojačanja i faze kod minimalno faznih sistema se mogu očitati i sa Bodeovih dijagrama. Po definiciji, pretek pojačanja a je recipročna vrijednost amplitudske karakterisitke na učestanosti na kojoj faza iznosi -180° :

$$a_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}, \text{ za } \varphi(\omega_\pi) = -180^\circ \text{ ili u dB } a_m = -20 \log |L(j\omega_\pi)|.$$

Pretek faze se definiše kao maksimalni ugao za koji se smije zarotirati Nikvistova kriva u negativnom smjeru, a da sistem sa NJPS ostane stabilan:

$$\gamma_m = 180^\circ + \arg \{L(j\omega_\gamma)\}, \text{ za } |L(j\omega_\gamma)| = 1 \text{ ili } |L(j\omega_\gamma)| = 0\text{dB}.$$

Pretek faze i pretek pojačanja



Pretek faze i pretek pojačanja

Ako su preteci faze i pojačanja veći od nule, onda će spregnuti sistem biti stabilan. Odnosno, ako su ove veličine manje od nule, sistem sa zatvorenom petljom će biti nestabilan.

Za sistem drugog reda, pretek faze se može dovesti u vezu sa faktorom relativnog prigušenja i preskokom:

$$\zeta \approx \gamma_m / 100, \text{ za } \gamma_m < 70^\circ,$$

pri čemu smo preskok već ranije definisali:

$$\Pi = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \%.$$

Ove relacije se mogu primijeniti i za sisteme većeg reda, pri čemu je su veze tačnije ukoliko su dodatni polovi i nule dovoljno udaljeni od dominantnih polova. Svakako, date formule se dobre za početno podešavanje parametra regulatora, pa se postupak može iterativno ponavljati, ukoliko specifikacije u vremenskom domenu nijesu zadovoljene.

Pretek faze i pretek pojačanja

Bitno je zapamtiti pravilo da se sa povećanjem preteka faze povećava faktor relativnog prigušenja, a samim tim se smanjuje preskok u vremenskom domenu. Rezonatni vrh spregnutog sistema je približno jednak:

$$M_r \approx \frac{1}{2 \sin(\gamma / 2)}.$$

Konačno, presječna učestanost preteka faze se može povezati sa propusnim opsegom spregnutog sistema. Naime, aproksimativno važi sljedeća veza:

$$\omega_B \cong [1.25, 2] \omega_\gamma. \quad [a, b] \triangleq \text{od } a \text{ do } b \text{ puta}$$

Povećavanjem presječne učestanosti preteka faze, povećava se propusni opseg sistema, a samim tim se skraćuje vrijeme uspona. Vrijeme smirenja je takođe obrnuto proporcionalno propusnom opsegu, ali i faktoru relativnog prigušenja.

Pretek faze i pretek pojačanja

Još jedna korisna aproksimacija koja važi za sisteme drugog reda, odnosno za sisteme većeg reda sa dominantnim kompleksnim polovima, je veza između presječne frekvencije preteka faze i prirodne neprigušene učestanosti spregnutog sistema:

$$\omega_n \approx \omega_\gamma.$$

Na osnovu ove veze se može napraviti procjena vremena smirenja:

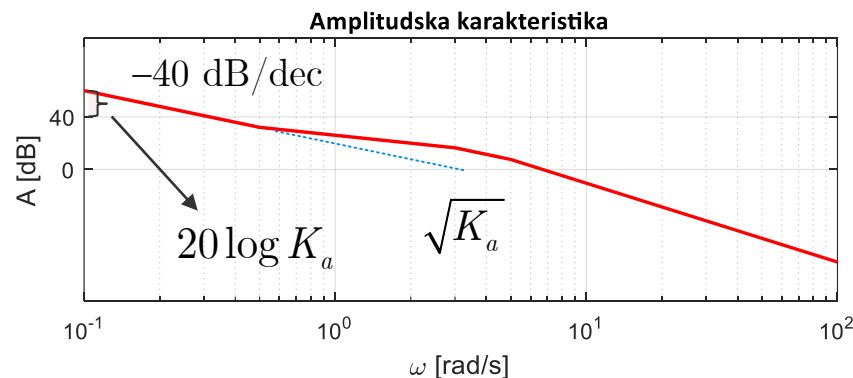
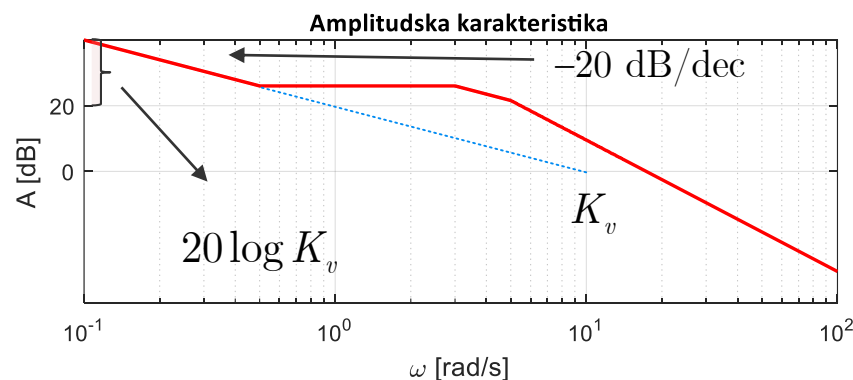
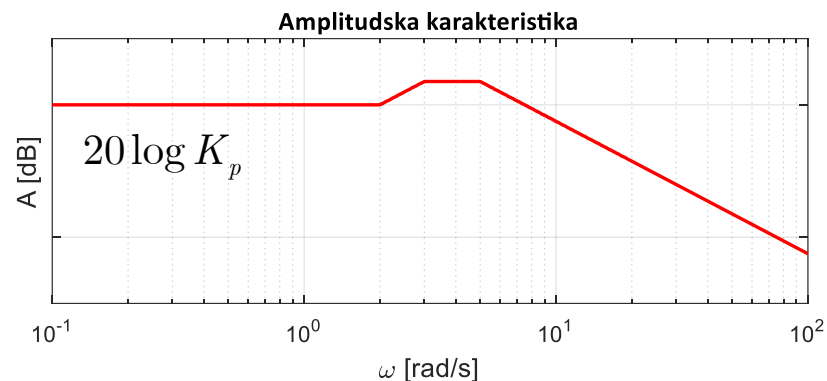
$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \approx \frac{4}{0.01\gamma\omega_\gamma}.$$

Vrijeme uspona se je obrnuto proporcionalno propusnom opsegu i može se estimirati pomoću formule:

$$T_r \cong [1.6 - 2.2] \times \frac{1}{\omega_B}.$$

Konstante greške

Ako funkcija prenosa u otvorenoj sprezi nema astatizam, tada je amplituduska karakteristika na niskim frekvencijama ravna i ima vrijednost $20\log K_p$, gdje je K_p konstanta položaja. Ukoliko funkcija prenosa ima astatizam prvog reda, tada se za nju definiše konstanta brzine K_v . Konstanta brzine predstavlja tačku presjeka početne prave nagiba -20 dB/dec sa ω osom. Takođe, konstanta brzine u dB se može odrediti iz razlike amplitudske karakteristike na 0.1 rad/s i 20 dB (za $K_v=1$ karakteristika počinje od 20 dB). Na sličan način se određuje konstanta ubrzanja K_a .



Primjer – veza između funkcija W i G

Funkcija prenosa sistema u otvorenoj sprezi je jednaka:

$$W = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

Presječna učestanost preteka faze i pretek faze su jednaki: 53.4° i 0.466 rad/s. Rezonantni vrh je jednak (u običnim vrijednostima):

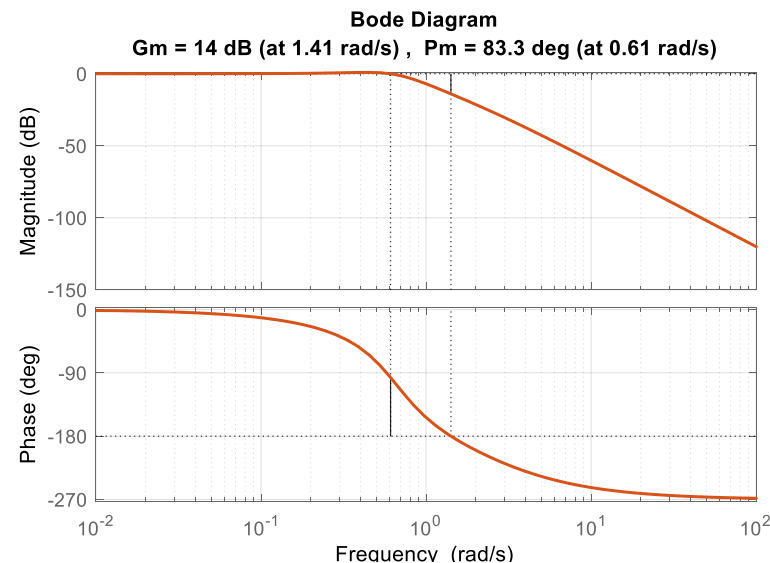
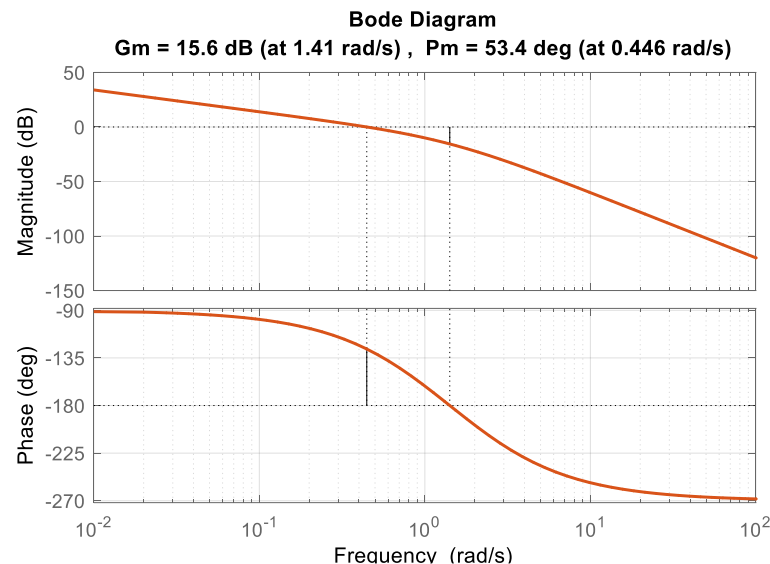
$$M_r \approx 2 \sin(\gamma_m / 2) \approx 1.1128.$$

Propusni opseg bi trebalo da bude u opsegu:

$$\begin{aligned} \omega_B &\approx [1.25, 2] \omega_\gamma \approx [1.25, 2] \times 0.466 \text{ rad/s} \\ &\approx [0.5825, 0.9320] \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

Faktor relativnog prigušenja je približno jednak:

$$\zeta \approx \gamma_m / 100 = 0.534.$$



Primjer – veza između funkcija W i G

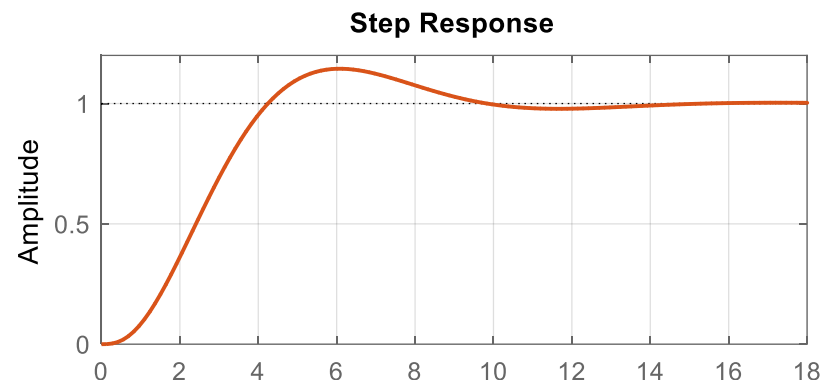
Očekivano vrijeme smirenja je:

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \approx \frac{4}{0.01\gamma\omega_\gamma} = \frac{4}{0.534 \times 0.466} = 16.07s,$$

dok bi vrijeme uspona trebalo da bude jednako:

$$T_r \approx \frac{1 + 1.1\zeta + 1.14\zeta^2}{\omega_\gamma} = \frac{1 + 1.1 \times 0.534 + 1.14 \times 0.534^2}{0.466} = 4.1s.$$

Na slici desno je prikazan step odziv sregnutog sistema, a na prethodnom slajdu Bodeovi dijagrami sistema u otvorenoj sprezi i sa zatvorenom spregom. Poklapanje sa tačnim vrijednostima karakterističnih veličina zavisi od toga koliko je treći pol udaljen od dominantnih polova. Uporedite izračunate veličine sa njihovim stvarnim vrijednostima (pogledati Matlab kod).



```
>> s=tf('s');  
>> W=1/s/(s+1)/(s+2)  
>> margin(W);  
>> figure(2)  
>> G=feedback(W,1)  
>> margin(G);  
>> figure(3),  
>> step(G)  
>> bandwidth(G) % propusni opseg  
>> getPeakGain(G)% Mr(linearna skala)  
>> damp(G) % faktor prigusenja  
>> stepinfo(G) % karakt. velicine u  
vremenskom domenu
```

Primjer – konstante greške

Na slici su prikazane amplitudske karakteristike dva sistema. Odrediti konstante greške i grešku spregnutog sistema u praćenju referentnog step signala.

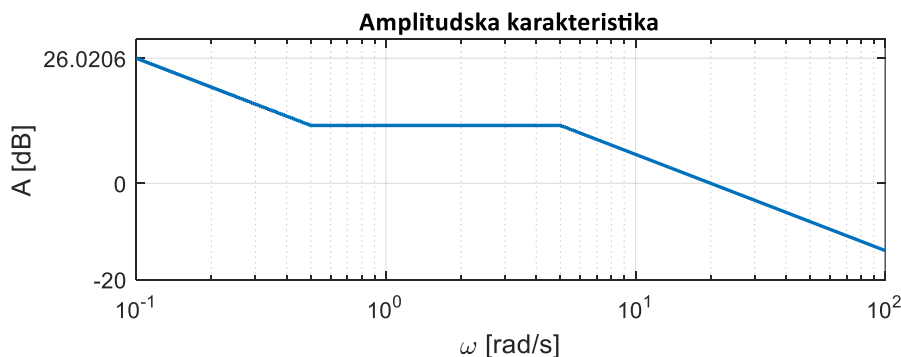
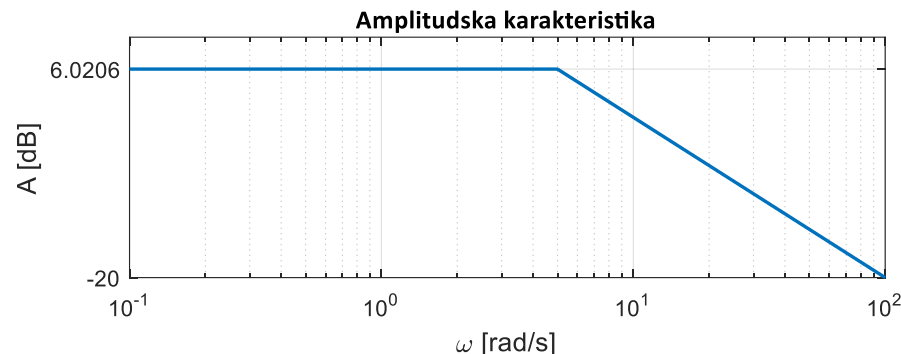
Sa dijagrama se može zaključiti da prvi sistem nema astatizam, a da drugi sistem ima astatizam prvog reda. Shodno, tome konstanta položaja prvog sistema je jednaka:

$$20 \log K_p = 6 \rightarrow K_p = 2,$$

dok su konstante brzine i ubrzanja jednake nuli. Konstanta brzine drugog sistema se računa iz uslova:

$$26 - 20 \log \frac{\omega}{0.1} = 0$$
$$\rightarrow K_v = 0.1 \times 10^{\frac{26}{20}} = 2.$$

Konstanta položaja drugog sistema je beskonačno, a konstanta ubrzanja nula.



Odgovarajuća konstanta greške je u stvari jednaka Bodeovom pojačanju sistema. U oba slučaja Bodeovo pojačanje je jednako 2.

Sinteza u frekvencijskom domenu

Već smo rekli da procedura dizajna SAU-a teče tako što se prvo „ispunjavaju“ zahtjevi vezani za konstante greške i red astatizma. Ovaj dio sinteze se radi analitički. Nakon toga se dodaju potrebni elementi koji imaju jedinično pojačanje (ne utiču na grešku u stacionarnom stanju), u cilju zadovoljenja zahtjeva vezanih za dinamičke performanse SAU-a.

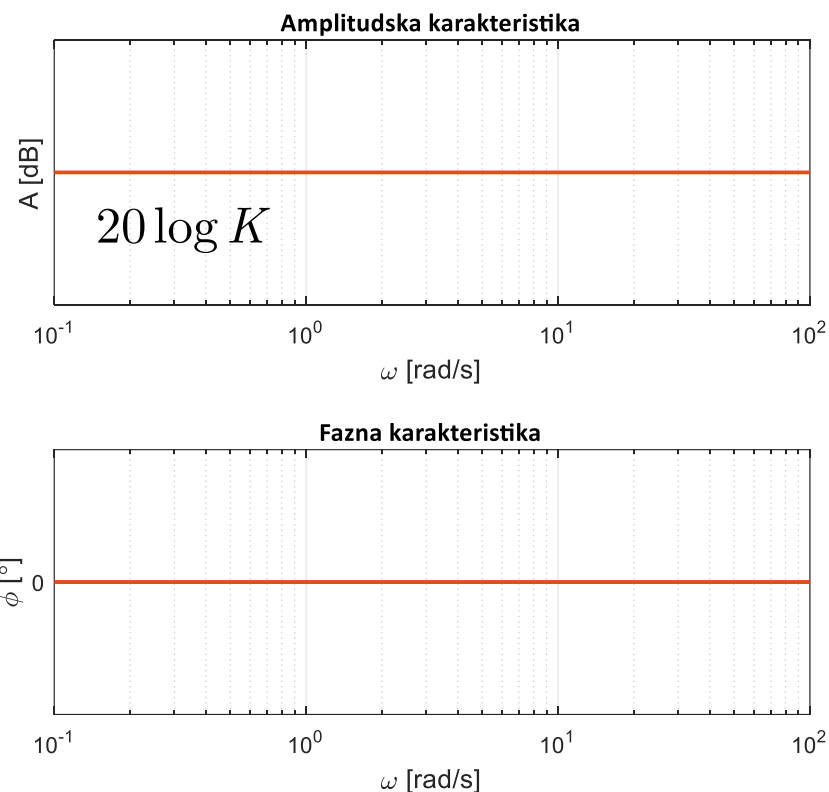
Parametre dodatnih komponenti nećemo određivati analitičkim putem, već ćemo primjenjivati grafički pristup, koji se zasniva na posmatranju Bodeovih dijagrama sistema u otvorenoj sprezi. Pri tome, zahtjeve za željenim dinamičkim performansama treba izraziti u vidu karakterističnih frekvencijskih veličina sistema u otvorenoj sprezi. Ako specifikaciju SAU-a zadajemo direktno u vremenskom domenu, onda se mogu koristiti aproksimativne formule za prevođenje tih zahtjeva u frekvencijski domen. Često se može desiti da se na ovaj način ne dobije SAU koji ima željene vremenske karakteristike, ali se procedura može ponavljati iterativno sve dok zahtjevi ne budu ispunjeni.

Pojačavač

Pojačavač se najčešće koristi za korekciju performansi sistema u stacionarnom stanju, odnosno kada treba da se podese željene konstante greške. Ako sistem ima astatizam, a pri tom nema zahtjeva za praćenjem rampa funkcije, pojačanje se može iskoristiti za podešavanje margina stabilnosti.

Pojačavač:

- podiže/spušta amplitudsku karakteristiku
- ne utiče na faznu karakteristiku



$$20 \log K > 0 \text{ dB, za } K > 1$$
$$20 \log K < 0 \text{ dB, za } 0 < K < 1$$

Pojačavač

	Karakteristike	$K > 1$	$K < 1$
Otvorena sprega	▪ margine stabilnosti ▪ presječna učestanost preteka faze	– +	+ –
Spregnuti sistem	▪ propusni opseg ▪ rezonantni vrh	+ +	– –
Kompleksni domen	▪ faktor relativnog prigušenja	–	+
Vremenski domen	▪ preskok ▪ vrijeme smirenja ▪ vrijeme uspona ▪ konstanta greške ▪ greška u stacionarnom stanju	+ – – –	– + + +

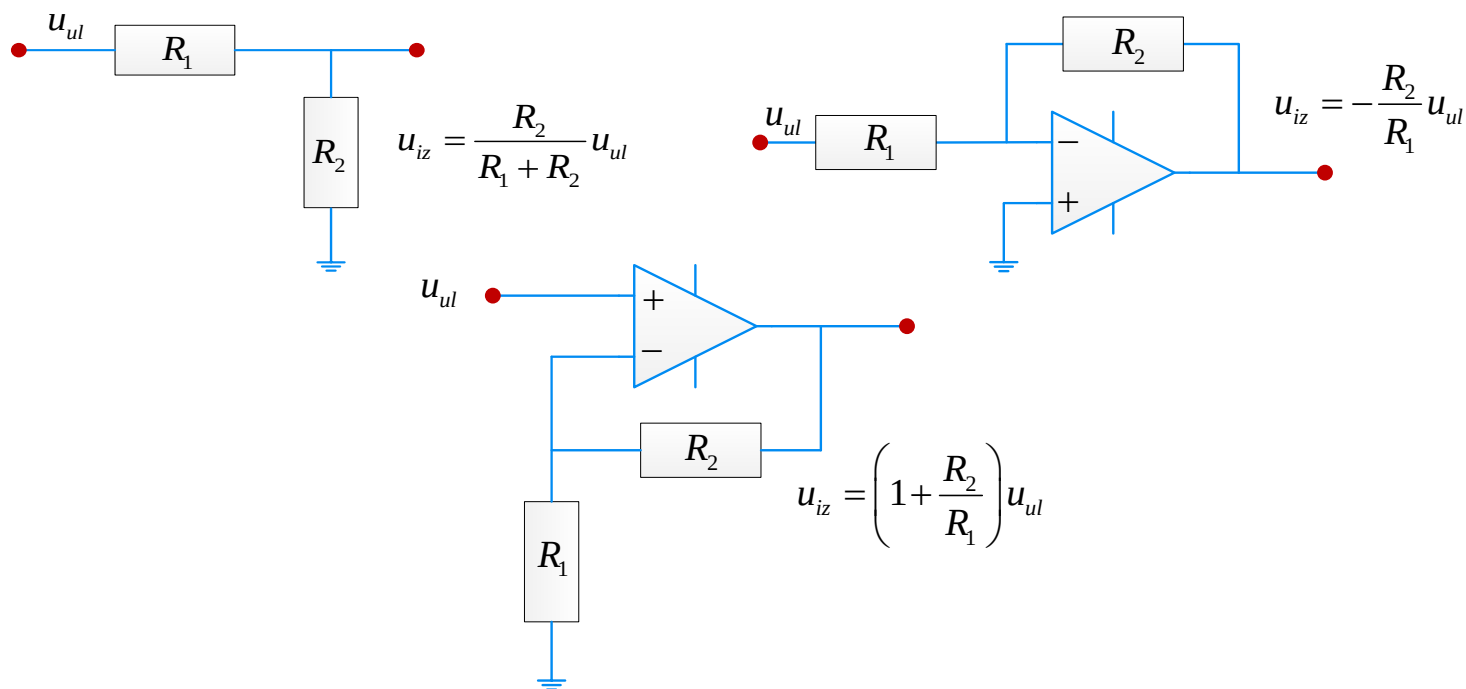
Kod sistema drugog reda vrijeme smirenja je jednako:

$$T_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta \omega_n}.$$

Sa povećanjem pojačanja, faktor relativnog prigušenja se smanjuje, dok se prirodna neprigušena učestanost povećava. Stoga, ne postoji generalno pravilo o tome kako pojačavač utiče na vrijeme smirenja.

Pojačavač

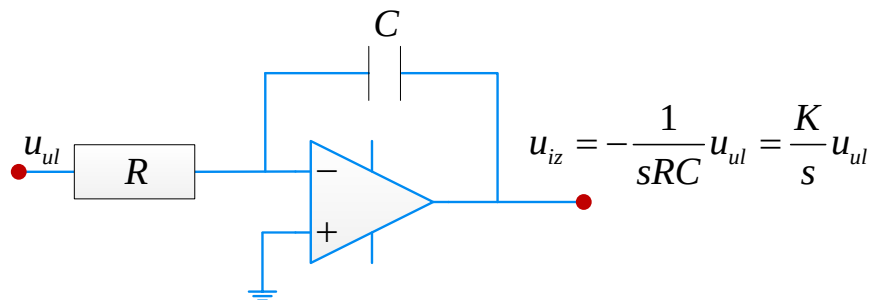
Ukoliko je pojačanje manje od jedinice, tada se ono može realizovati preko pasivnih elemenata. Ako je pojačanje veće od jedinice, tada se koriste aktivne komponente, koje imaju napajanje. Ispod su date dvije realizacije preko invertujućeg i neinvertujućeg pojačavača.



Pojačavač sa integratorom

Nekad je potrebno povećati red astatizma, kako bi se eliminisala greška u praćenju signala polinomijalnog tipa. Dodavanje integratora ima i negativne strane. Ukoliko u direktnu granu dodamo integrator prvog reda, to će značajno destabilisati sistem, jer se na svim frekvencijama unosi negativna faza od 90° , odnosno pretek faze se smanjuje za 90° . Često se može desiti da se takav sistem ne može ustabiliti samo sa pojačavačem.

Ispod je data implemetacija jednostrukog integratora K/s pomoću operacionog pojačavača.



Primjer – pozicioni servo

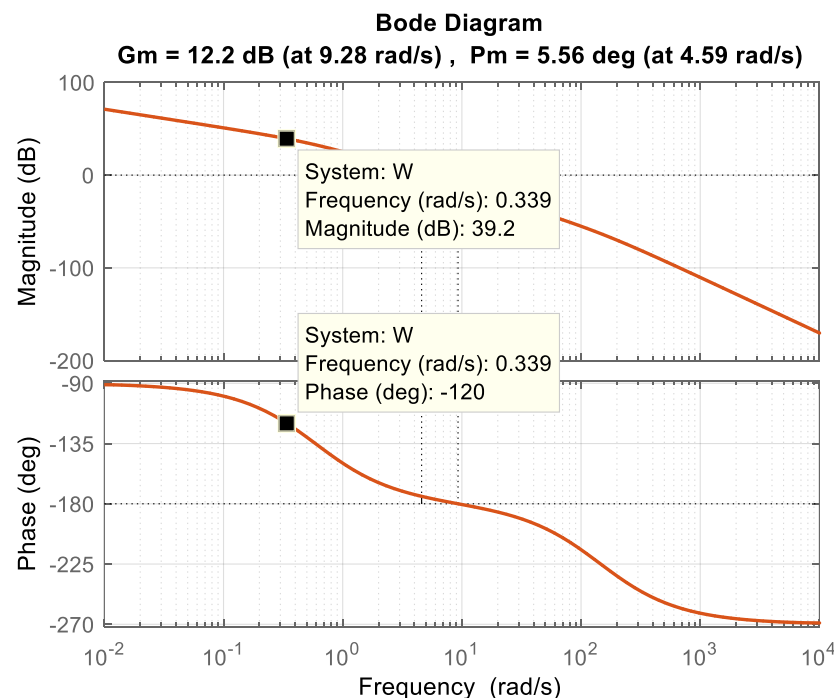
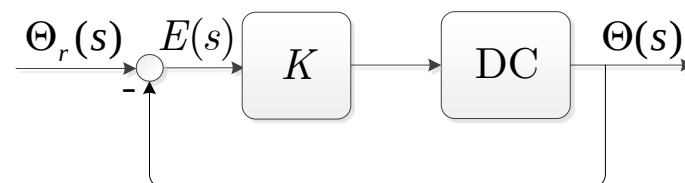
Za određene parametre pozicionog servomehanizma, funkcija prenosa između napona i ugaonog pomjerača je jednaka:

$$W(s) = \frac{3086}{s(s^2 + 145.5s + 86.14)}.$$

Odrediti pojačanje K tako da budu zadovoljeni sljedeći zahtjevi:

- a) $\gamma_m^* = 60^\circ$
- b) $a_m^* = 20dB$
- c) $e^*(\infty) = 0.01$
- d) $\omega_\gamma^* = 10 rad/s$
- e) $K_v^* = 100$

Na slici desno u prikazani Bodeovi dijagrami nekompenzovanog sistema.



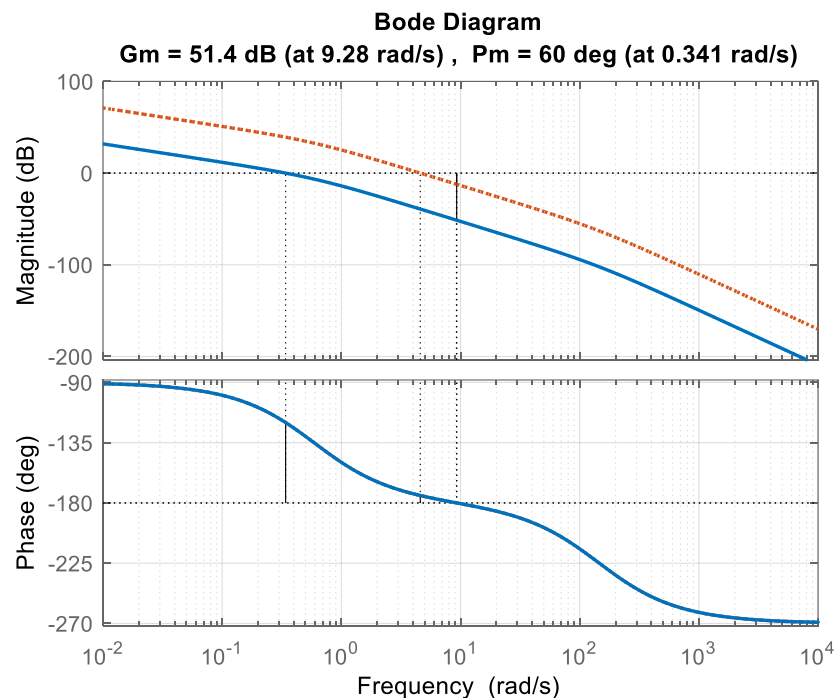
Primjer – pozicioni servo

Kako je željena vrijednost preteka faze:

$$\gamma_m^* = 60^\circ = 180^\circ + \varphi(j\omega_\gamma^*),$$

a sa pojačanjem ne možemo da utičemo na faznu karakteristiku, jasno da je da treba podesiti presječnu učestanost preteka faze. Prvo treba naći frekvenciju na kojoj faza iznosi -120° . Očitana frekvencija predstavlja željenu presječnu učestanost preteka faze, odnosno, na njoj vrijednost pojačanja treba da bude 0 dB. Dakle, amplitudu treba spustiti za 39.2 dB:

$$20 \log K = -39.2 \rightarrow K = 0.011.$$

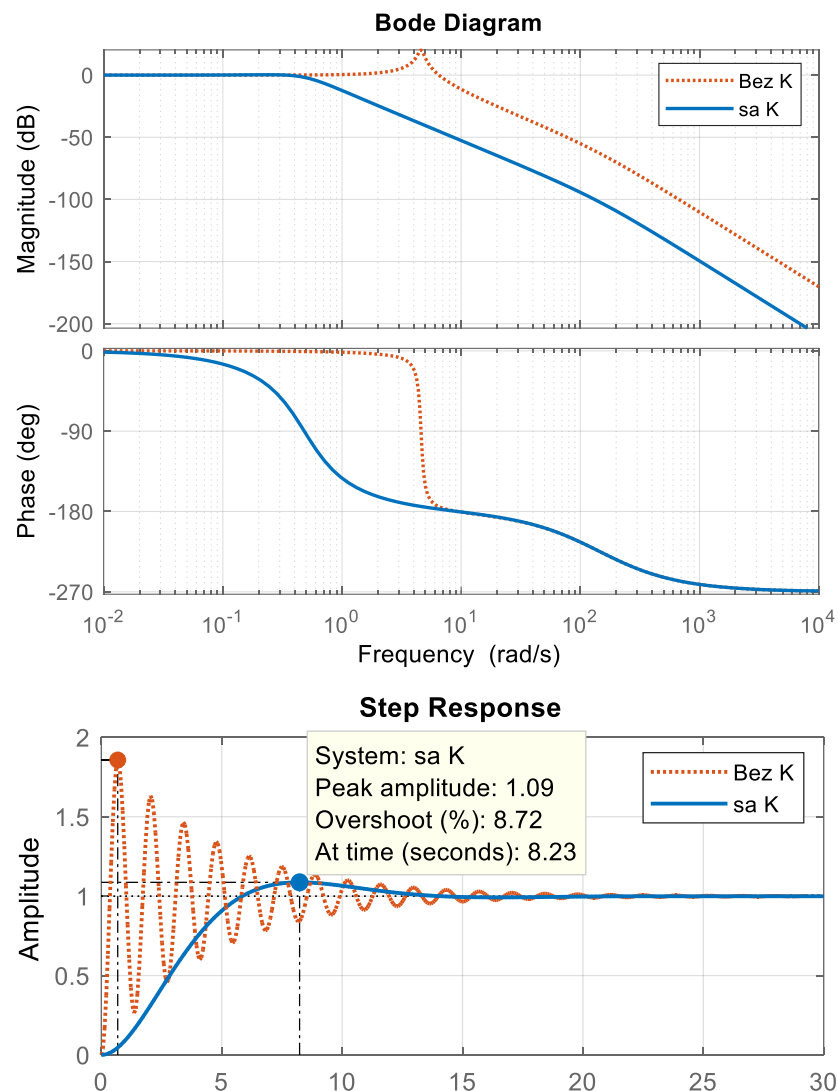


```
>> s=tf('s');  
>> W=3086/(s^2+145.5*s+86.14)/s  
>> margin(W);  
>> K=10^(-39.2/20)  
K = 0.0110  
>> hold on  
>> margin(K*W);
```

Primjer – pozicioni servo

Na slici desno su prikazani dijagrami spregnutog nekompenzovanog i kompenzovanog sistema. Sistem bez kompenzatora ima mali pretek faze (u otvorenoj sprezi), pa samim tim spregnuti sistem ima veliki rezonantni vrh i veliki preskok u vremenskom domenu. Dodavanjem pojačavača čije je pojačanje manje od 1, popravljja se pretek faze, smanjuje preskok, ali i propusni opseg spregnutog sistema, odnosno brzina sistema (vrijeme uspona).

Na slikama su prikazani step odzivi početnog i kompenzovanog sistema. Može se uočiti da je preskok značajno smanjen i da iznosi 8.72%. Vrijeme uspona je takođe smanjeno, jer je smanjen i propusni opseg.



Primjer – pozicioni servo

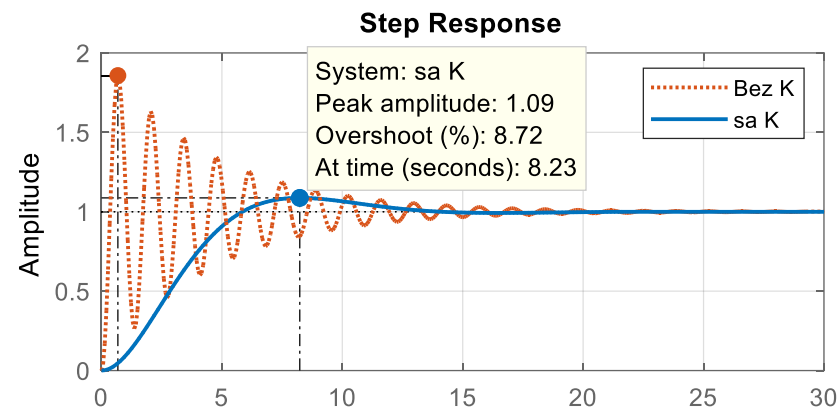
Provjerimo i na ovom primjeru validnost aproksimativnih formula. Očekivana vrijednost faktora relativnog prigušenja je oko:

$$\zeta^* = \gamma_m^* / 100 = 0.6,$$

što znači da bi preskok trebalo da bude oko 9.48%. Očekivana vrijednost propusnog opsega je u intervalu:

$$[1.5 - 2] \times \omega_\gamma^* = [0.51 - 0.68] \text{ rad/s}.$$

Propusni opseg spregnutog sistema je 0.5472 rad/s, što je u skladu sa očekivanim rezultatima. Zanimljivo je da je u ovom primjeru vrijeme smirenja kompenzovanog sistema smanjeno, iako je smanjen propusni opseg. Razlog za to je što je značajno povećan i faktor prigušenja, a vrijeme smirenja je njemu obrnuto proporcionalno.



```
>> G=feedback(W,1)
>> G1=feedback(K*W,1)
ans = 0.5472
>> bandwidth(G1)
>> bode(G);
>> hold on
>> bode(G1)
>> figure(2)
>> step(G)
>> hold on
>> step(G1)
```

Primjer – brzinski servo

DC motor je opisan funkcijom prenosa

$$W(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{0.02}{0.0384 s + 0.64}.$$

Dizajnirati kontroler tako da greška u praćenju rampe funkcije bude 0.01.

Nacrtati principijelnu šemu upravljanja.

Kako sistem u otvorenoj sprezi nema astatizam, treba odabrati sljedeći kontroler:

$$C(s) = \frac{K}{s},$$

gdje se K traži uz uslova da je greška za linearni referentni signal bude jednaka 0.01:

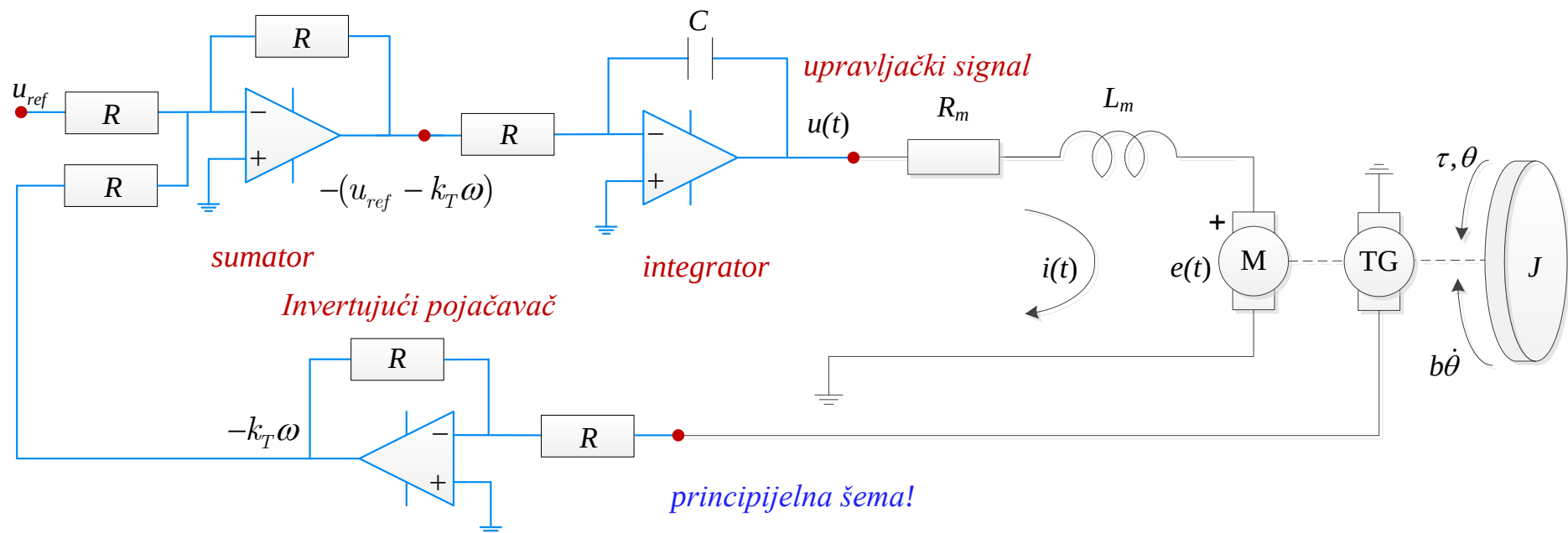
$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + C(s)W(s)} = 0.01.$$

Iz prethodnog uslova se dobija da je $K=3200$.

Voditi računa da je nova funkcija povratnog prenosa $C(s)W(s)$.

Primjer – upravljanje brzinom

Ispod je data principijelna šema SAU-a. Vrijednosti otpornika i kondenzatora treba odabrati na osnovu prethodnog proračuna. Za formiranje signala greške korišten je sumator, pri čemu je prije toga napon tahogenetaora invertovan kako bi se dobio negativan predznak. Referentni signal se zadaje u vidu napona.



Integralni kompenzator

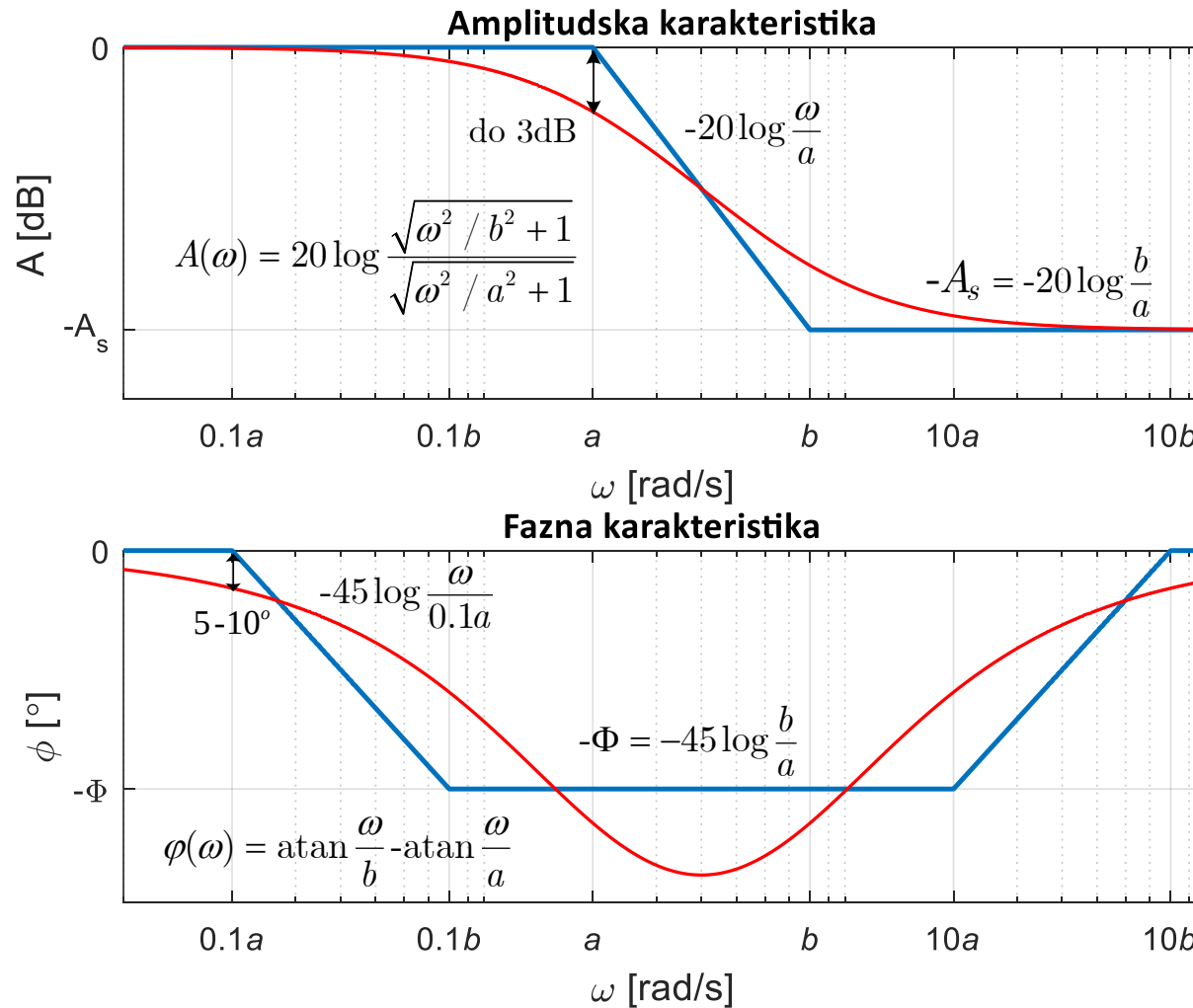
Često kod sistema upravljanja imamo dva zahtjeva: jedan vezan za grešku u stacionarnom stanju (ili konstante greške), a drugi vezan za stabilnost i dinamiku sistema (pretek faze, pretek pojačanja ili neku drugu frekvencijsku karakteristiku sistema u otvorenoj sprezi).

Proporcionalni regulator K se ne može iskoristiti za ispunjavanje oba zahtjeva. Pojačanje K se tada koristi za podešavanje greške u stacionarnom stanju (ili konstante greške), dok se za podešavanje frekvencijskih karakteristika koriste integralni i diferencijalni kompenzatori. Funkcija prenosa integralnog kompenzatora je:

$$G_i(s) = \frac{s / b + 1}{s / a + 1}, a \in \mathbb{R}_{>0}, b \in \mathbb{R}_{>0}, a < b.$$

Integralni kompenzator na niskim učestanostima ne utiče na frekvencijsku karakteristiku sistema, na srednjim učestanostima se ponaša kao integrator, dok se na visokim učestanostima ponaša kao pojačavač (pogledati frekvencijsku karakteristiku na sljedećem slajdu).

Integralni kompenzator



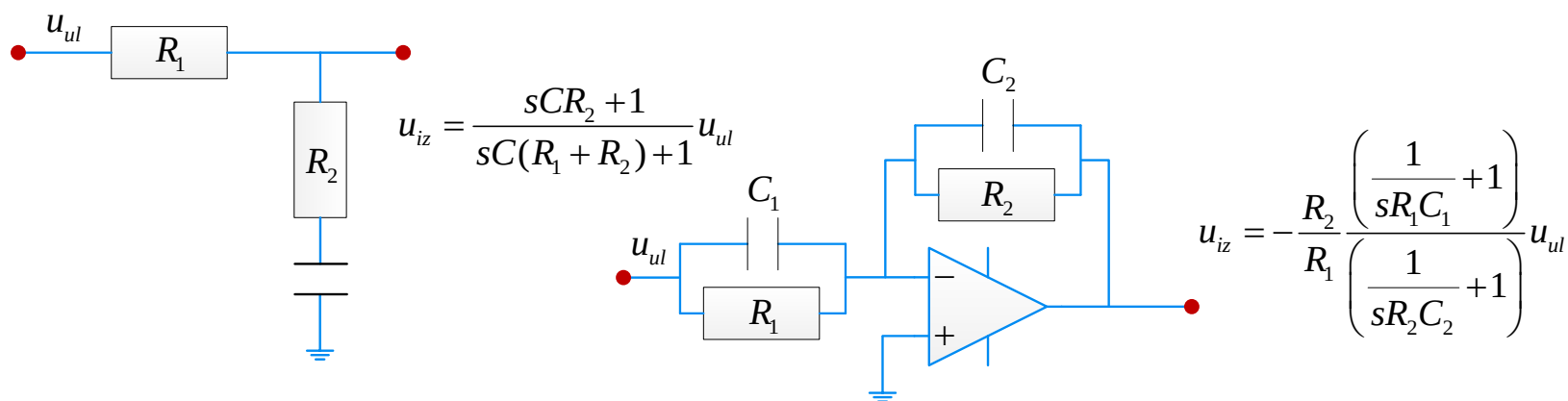
Integralni kompenzator

Integralni kompenzator ima jedinično pojačanje, pa samim tim ne utiče na konstante greške i grešku u stacionarnom stanju spregnutog sistema. Iz toga razloga uvijek prvo treba odrediti potrebni red astatizma i izračunati K , i time zadovoljiti zahtjeve vezane za konstante greške. Nakon toga treba pristupiti sintezi integralnog kompenzatora.

Integralni kompenzator može da smanji presječnu učestanost preteka faze, povećava pretek faze i relativnu stabilnost, a samim tim i da smanji vrijednost rezonantnog vrha spregnutog sistema i preskoka u vremenskom domenu. Pored toga, integralni kompenzator smanjuje propusni opseg spregnutog sistema, odnosno usporava sistem povećavajući vrijeme uspona, a najčešće i vrijeme smirenja (vrijeme smirenja je obrnuto proporcionalno propusnom opsegu, ali i faktoru relativnog prigušenja koji se povećava).

Integralni kompenzator

Integralni kompenzator se takođe može realizovati pomoću pasivnih ili aktivnih komponenti, u zavisnosti od toga da li je pojačanje veće ili manje od nule (integralni kompenzator se obično realizuje zajedno sa pojačavačem). Ispod je dati primjeri realizacija. Prikazana realizacija preko aktivnih komponenti ima negativan predznak pojačanja, što znači da bi redno trebalo vezati i invertujući pojačavač. Takođe treba imati u vidu da veći broj aktivnih komponenti povlači sa sobom i veću cijenu implementacije sistema upravljanja.



Sinteza integralnog kompenzatora

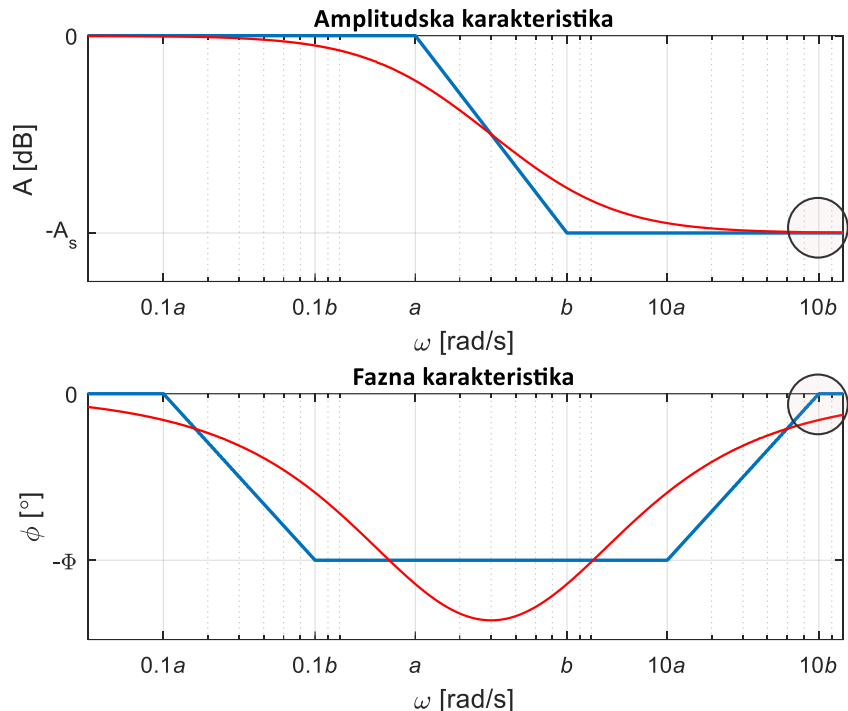
Ukoliko pomoću integralnog kompenzatora želimo da spustimo amplitudu na nekoj učestanosti ω_i za vrijednost A_s , a da pri tome ne utičemo na fazu, tada se koristi dio karakteristike na kojoj se G_i ponaša kao čisto pojačanje (nakon $10b$)

Prvo se bira parametar b iz uslova da fazni pomjeraj na ω_i bude jednak nuli:

$$10b = \omega_i \rightarrow b = \frac{\omega_i}{10}.$$

Parametar a se bira iz uslova da pojačanje bude jednako $-A_s$:

$$-A_s = -20 \log \frac{b}{a} \rightarrow a = b \times 10^{-A_s/20}.$$



$$b = \frac{\omega_i}{10}, a = b \times 10^{-A_s/20}$$

Obratiti pažnju na to da je $A_s > 0$

Sinteza integralnog kompenzatora

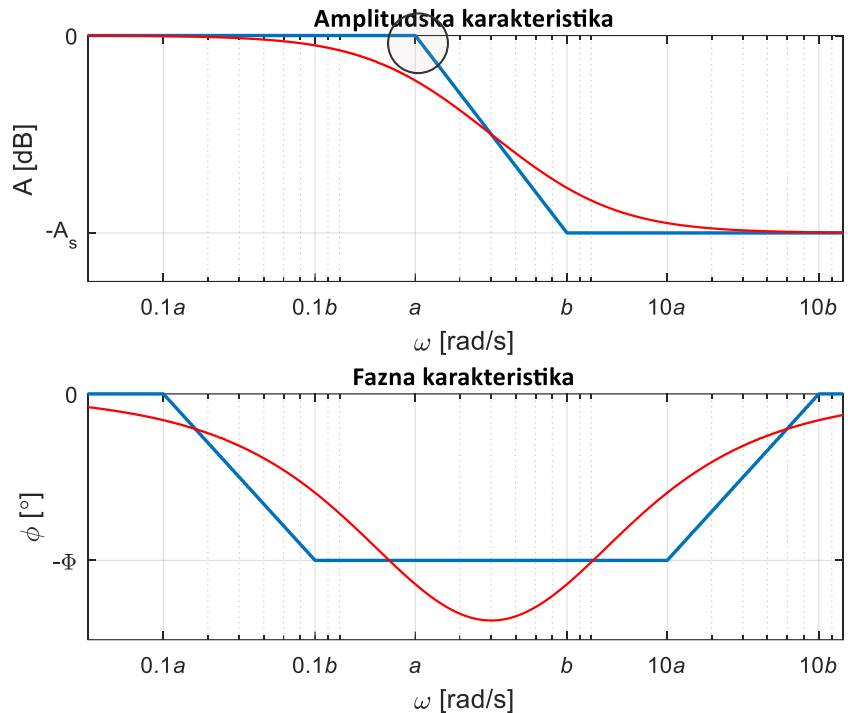
Predloženi način nije i jedini način za odabir tačaka a i b . Nekad se može zahtijevati da na učestanosti ω_i spustimo amplitudu za A_s , a da pri tome ne utičemo na amplitudu na nekoj nižoj učestanosti ω_j . Tada prvo treba fiksirati parametar a :

$$a = \omega_j,$$

dok se parametar b bira iz uslova da pojačanje na ω_i bude jednako $-A_s$:

$$-A_s = -20 \log \frac{b}{a} \rightarrow b = a \times 10^{A_s/20}.$$

Ako je se dobije da je $b > \omega_i$, tada treba usvojiti dvostruki integrator (ili višestruki).



$$a = \omega_j, b = a \times 10^{A_s/20}.$$

Treba voditi računa da su date relacije izvedene na osnovu asimptotske karakteristike

Primjer – pozicioni servo

Za određene parametre DC motora, funkcija prenosa između napona i ugaonog pomjeraja je jednaka:

$$W(s) = \frac{3086}{s(s^2 + 145.5s + 86.14)}.$$

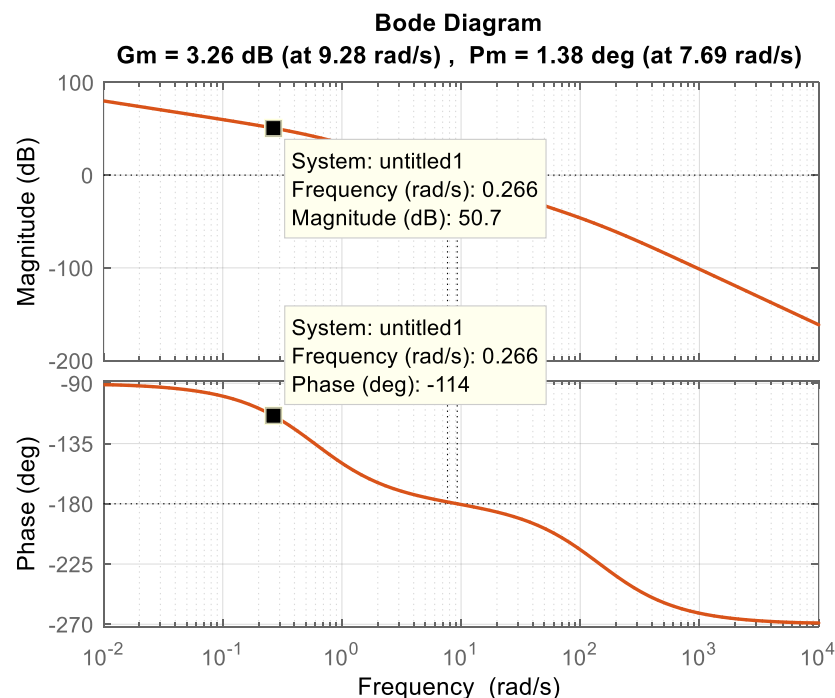
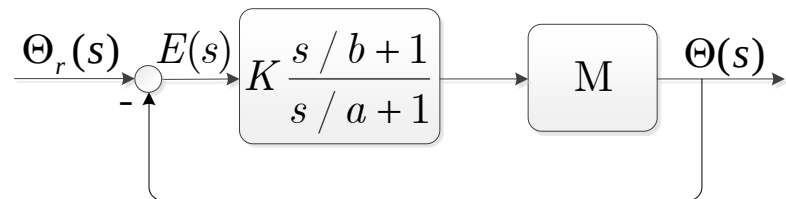
Izvršiti sintezu kompenzatora tako da budu zadovoljeni sljedeći zahtjevi:

$$K_v^* = 100, \gamma_m^* = 60^\circ (\pm 3^\circ).$$

Pojačanje sistema se određuje iz uslova:

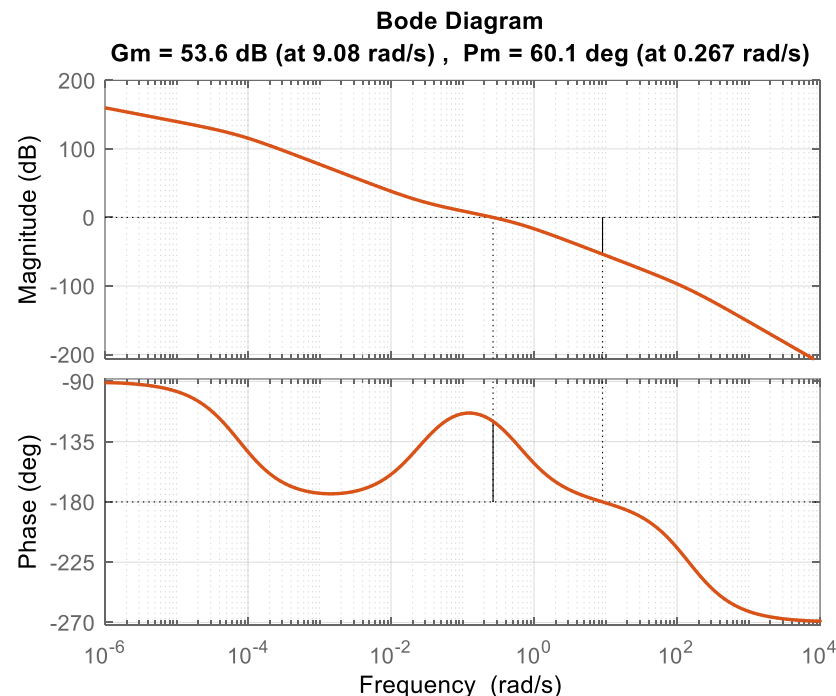
$$K_v^* = 100 = \lim_{s \rightarrow 0} sKW(s) = K \frac{3086}{86.14}$$
$$\rightarrow K = 2.7913.$$

Na slici desno u prikazani Bodeovi dijagrami sistema u otvorenoj sprezi nakon unošenja pojačanja.



Primjer – pozicioni servo

Kada podešavamo pretek faze na željenu vrijednost, treba imati u vidu karakteristiku realnog integratora koji na učestanosti $10b$ unosi negativnu fazu od $5-10^\circ$. To znači da u ovom slučaju nećemo tražiti frekvenciju na kojoj faza iznosi -120° , već ćemo se pomjeriti za 6° ulijevo (-114°), jer će nakon sinteze integralnog kompenzatora faza na posmatranoj frekvenciji iznositi približno -120° .



Sa Bodeovih dijagrama, nakon dodavanja K , se očitavaju sljedeći podaci:

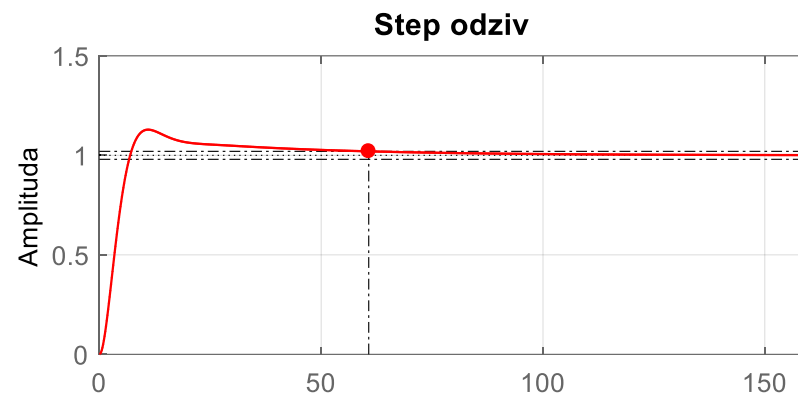
$$\omega_i = 0.224 \text{ rad/s i } A_s = 50.7 \text{ dB,}$$

odakle se dobija da je $a=7.5853 \times 10^{-5}$ i $b=0.026$. Na slici iznad su prikazani Bodeovi dijagrami kompenzovanog sistema. Može se primijetiti da pretek faze ima zadovoljavajuću vrijednost.

Primjer – pozicioni servo

Na slici je prikazan step odziv spregnutog sistema. Može se uočiti da preskok ima zadovoljavajuću vrijednost, međutim vrijeme smirenja je veliko, oko 60s. Vrijeme smirenja je povećano iz razloga što integralni kompenzator smanjuje propusni opseg sistema. U suštini što se tačka 10b nalazi lijevlje od presječne učestanosti preteka faze i što je A_s veće, to će propusni opseg biti više smanjen.

Propusni opseg sistema je 0.4308 rad/s, dok se na osnovu aproksimativnih formula očekivalo da će on bude u intervalu [0.4005, 0.5340] rad/s. Preskok sistema je 12.9%, a očekivana vrijednost je bila 9.42% (provjeriti proračun).



```
>> s=tf('s');  
>> W=3086/(s^2+145.5*s+86.14)/s  
>> K=100*86.14/3086  
>> margin(K*W);  
>> b=0.26/10  
>> a=b*10^(-50.7/20)  
>> Gi=(s/b+1)/(s/a+1)  
>> margin(K*W*Gi)  
>> G=feedback(K*Gi*W,1)  
>> step(G)  
>> bandwidth(G)
```